(a) *μ je invarijantna u odnosu na translacije:*

$$\mu(A + x) = \mu(A),$$

(b) *Ako je $\widetilde{\mu} : \mathcal{J} \to \mathbf{R}$ proizvoljna nenegativna aditivna funkcija skupa invarijantna u odnosu na translacije, onda postoji $c > 0$ takav da je $\widetilde{\mu}(A) = c\mu(A)$ za svaki $A \in \mathcal{J}$.*

(Primijetimo da iz (i) slijedi: 1° $A \in \mathcal{I}$ ako i samo ako $\overline{A} \in \mathcal{I}$; 2° ako je $A \in \mathcal{I}$, onda je $\overline{A}$ kompaktan i $\mu(\overline{A}) = \mu(A)$).

Dokaz. Tvrđenja (i), (ii) i (a) su trivijalne posljedice leme 3.9. Za dokaz tvrđenja (iii) dovoljno je provjeriti da se lopta u euklidskom prostoru ne može predstaviti kao unija konačno mnogo disjunktnih intervala, a to prepuštam čitaocu (zadatak 1). Mi ćemo dokazati tvrđenje (b).

Neka je $I_1^n = [0,1]^n$ jedinični kub u $\mathbf{R}^n$ i c realan broj određen sa $\widetilde{\mu}(I_1^n) = c\mu(I_1^n)$. Diobom stranica kuba na m jednakih djelova dobijamo m^n kubova čije stranice imaju dužinu $1/m$. Pošto je $\widetilde{\mu}$ aditivna, i invarijantna u odnosu na translacije, slijedi da je

$$\widetilde{\mu}(I_{1/m}^n) = \frac{1}{m^n}\widetilde{\mu}(I_1^n) = c \cdot \frac{1}{m^n}\mu(I_1^n) = c\mu(I_{1/m}^n)$$

gdje je $I_{1/m}^n$ kub čija stranice imaju dužinu jednaku $1/m$. Odatle lako slijedi da je $\widetilde{\mu}(I^n) = \mu(I^n)$ za svaki interval koji ima svojstvo da su dužine njegovih stranica racionalni brojevi. Pošto je $\widetilde{\mu}$ monotona, dobija se da je $\widetilde{\mu}(I^n) = \mu(I^n)$ za svaki interaval I^n, a iz aditivnosti funkcije $\widetilde{\mu}$ i 2.4 da je $\widetilde{\mu}(E) = \mu(E)$ za svaki elementaran skup E. Konačno, pošto je $\widetilde{\mu}$ monotona, dobijamo da je $\mu(E_1) \subset \widetilde{\mu}(A) \subset \mu(E_2)$ za svaki svaki par elementarnih skupova E_1 i E_2 takvih da je $E_1 \subset A \subset E_2$. Odatle slijedi (b).

3.11. Primjeri. (a) Intervali i elementarni skupovi su mjerljivi po Jordanu, (lema 3.2 ili teorema 3.7). Konačni skupovi u $\mathbf{R}^n$ su takođe mjerljivi po Jordanu, jer imaju spoljnu Jordanovu mjeru (zapreminu) jednaku nuli (dokažite!). Ograničeni skup A u $\mathbf{R}^n$ koji leži u nekom od afinih potprostora $x^i = \text{const.}$ ima Jordanovu mjeru jednaku nuli, jer leži u intervalu čija je ivica duž ose x^i proizvoljno male dužine. Specijalno, stranice intervala I^n kao i cijela granica ∂I^n je skup mjere nula u $\mathbf{R}^n$.

Dokazaćemo sada da su skupovi kao što su paralelopipedi (ne samo intervali), kružnica ili sfera redom u $\mathbf{R}^2$ i u $\mathbf{R}^3$ (primjer (c) dolje), skupovi Jordanove mjere nula, i sve figure koje se sretaju u elementarnoj geometriji, mjerljivi skupovi.

(b) Neka je $A \subset \mathbf{R}^n$, $\mu(A) = 0$ i $f : U \to \mathbf{R}^n$ zadovoljava Lipschitzov uslov u nekoj okolini zatvaranja $\overline{A}$, (tj. postoji $M > 0$ takav da je $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$ za svaki $x \in U$ i svaki $y \in U$). Tada je $\mu(f(A)) = 0$.

Budući da linearno preslikavanje $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ zadovoljava Lipshitzov uslov, a paralelopiped P čije su ivice vektora $v_1, \dots, v_n$ je slika intervala I^m pomoću linearnog preslikavanja određenog sa $Ae_i = v_i$, slijedi da su stranice i čitava granica svakog paralelopipeda skupovi Jordanove mjere nula i da je svaki paralelopiped skup mjerljiv po Jordanu.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Skup A možemo pokriti sa konačno mnogo kubova $C_1, \dots, C_k$ takvih da je

$$\sum_i \mu(C_i) < \frac{\varepsilon}{(M\sqrt{n})^n} \tag{12}$$

gdje je $M > 0$ takav da je

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\| \quad \text{za } x, y \in \bigcup C_i. \tag{13}$$

(Pokrivač skupa $\overline{A}$ od konačno mnogo kubova za koje važi (12) postoji jer je $\mu(\overline{A}) = 0$. Usitnjavajući takve kubove na potkubove čija je dijagonala $< d(\overline{A}, \partial U)$ prelazimo na kubove $C_1, \dots, C_k$ za koje važi (13)). Neka je $r_i/2$ dužina dijagonale kuba C_i. Iz (13) slijedi da skup $f(C_i \cap A)$ leži u kubu S_i čija je dijagonala $\leq M r_i \sqrt{n}$. Slijedi da je $\mu(S_i) \leq (M\sqrt{n})^n \mu(C_i)$ i iz (12) dobijamo da je

$$\mu(C) \leq \sum_i \mu(C_i) < \varepsilon.$$

To znači da $f(A)$ ima Jordanovu mjeru jednaku nuli.

(c) Ako je A ograničen skup u $\mathbf{R}^m$, $m < n$ i $f : A \to \mathbf{R}^n$ zadovoljava Lipschitzov uslov u nekoj okolini od $\overline{A}$, onda je $f(A)$ Jordanove mjere nula. Specijalno, ako je $f : U \to \mathbf{R}^n$ preslikavanje iz klase C^1, A kompaktan podskup otvorenog skupa $U \subset \mathbf{R}^m$ i $m < n$, onda je Jordanova mjera skupa $f(A)$ jednaka nuli.

(Ovo obuhvata slučaj kružnice u $\mathbf{R}^2$ i sfere u $\mathbf{R}^3$. Odnosno opštije, glatke kompaktne krive u $\mathbf{R}^2$ i kompaktne površi u $\mathbf{R}^3$. (Definiciju krive i površi dajemo u Glavi VIII). To istovremeno znači da su standardne geometrijske figure i tijela skupovi mjerljivi po Jordanu).

Dokaz. Neka je $i : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ potapanje prostora $\mathbf{R}^m$ u m-dimenzionalan koordinatni podprostor od $\mathbf{R}^n$. Skup $i(A)$ ima Jordanovu mjeru nula u $\mathbf{R}^n$, jer leži u koordinatnom potprostoru. Neka je $g : f(A) \to \mathbf{R}^n$ definisano sa $g(f(x)) = f(x)$. Pošto je i izometrija, preslikavanje g zadovoljava Lipschitzov uslov u nekoj okolini od $\overline{f(A)}$. Iz (b) slijedi da $f(A) = g(f(A))$ ima Jordanovu mjeru nula.

(d) Ako je U otvoren skup u $\mathbf{R}^m$, $m \leq n$, $f : U \to \mathbf{R}^n$ C^1-preslikavanje, $\overline{A} \subset U$ i $\mu(A) = 0$ ako je $m = n$, (A je ograničen ako je $m < n$), onda je $\mu(f(A)) = 0$.

Dokaz. Pošto je $\overline{A}$ kompaktan, možemo ga pokriti sa konačno mnogo otvorenih kubova čija zatvaranja leže u U. Zato je dovoljno dokazati da je za svaki zatvoreni kub C koji leži u U slika skupa $C \cap A$ skup mjere nula. To je posljedica primjera (a) (odnosno primjera (b)) i činjenice da neprekidno diferencijabilno preslikavanje f na kompaktnom konveksnom skupu zadovoljava Lipschitzov uslov (vidi II.8.14).

(e) Ako je U otvoren skup u $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}^n$ C^1-preslikavanje, $A \subset \mathbf{R}^n$ mjerljiv po Jordanu takav da je $\overline{A} \subset U$ i $\det f' \neq 0$ na unutrašnjosti od A, onda je $f(A)$ mjerljiv po Jordanu.

Dokaz. Iz $\overline{A} = \operatorname{Int} A \cup \partial A$ slijedi da je $f(\overline{A}) = f(\operatorname{Int} A) \cup f(\partial A)$. S druge strane, iz teoreme o inverznom preslikavanju slijedi da je $f(\operatorname{Int} A) \subset \operatorname{Int} f(\overline{A})$. Odatle dobijamo da je $\partial f(\overline{A}) \subset f(\partial A)$. Ostaje da primijetimo da je $\partial A = \partial \overline{A}$ i da primijenimo (c) i 3.10(i) na skup ∂A.

U sljedećoj teoremi daje se geometrijsko značenje apsolutne vrijedosti determinante linearnog preslikavanja.

3.12. Teorema. *Ako je $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ linearno preslikavanje i D mjerljiv skup, onda je i AD mjerljiv i*

$$\mu(AD) = |\det A| \mu(D). \tag{11}$$

Dokažimo najprije sljedeće tvrđenje iz linearne algebre.

3.13. Lema. *Svako nesingularno linearno preslikavanje $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ može se predstaviti kao kompozicija linearnih preslikavanja koja u odnosu na standardnu bazu $(e_1, \dots, e_n)$ imaju jednu od sljedećih reprezentacija:*

(i) $e_i \longmapsto \alpha e_i$, $e_j \longmapsto e_j$ *za* $j \neq i$,

(ii) $e_j \longmapsto e_i + e_j$, $e_k \longmapsto e_k$ *za* $k \neq j$,

Ili u koordinatnoj formi:

$$(\dots, x^i, \dots) \xmapsto{T^i_\alpha} (\dots, \alpha x^i, \dots),$$
$$(\dots, x^i, \dots) \xmapsto{S_{ij}} (\dots, x^i + x^j, \dots),$$

pri čemu je oba puta upisana samo koordinata koja se mijenja.

Dokaz. Dokažimo najprije da se preslikavanje koje vrši permutaciju vektora $(e_1, \dots, e_n)$ može predstaviti kao kompozicija preslikavanja (i) i (ii). Dovoljno je dokazati da preslikavanje koje vrši transpoziciju dva vektora, e_i i e_j ima takvu reprezentaciju. Upisujući samo koordinate koje se mijenjaju imamo da je:

$$\begin{aligned}(\dots, x^i, \dots, x^j, \dots) &\xmapsto{S_{ij}} (\dots, x^i + x^j, \dots, x^j, \dots) \\ &\xmapsto{T^i_{-1}} (\dots, -x^i - x^j, \dots, x^j, \dots)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\xmapsto{S_{ji}} (\ldots, -x^i - x^j, \ldots, -x^i, \ldots)\\
&\xmapsto{T^j_{-1}} (\ldots, -x^i - x^j, \ldots, x^i, \ldots)\\
&\xmapsto{S_{ij}} (\ldots, -x^j, \ldots, x^i, \ldots)\\
&\xmapsto{T^i_{-1}} (\ldots, x^j, \ldots, x^i, \ldots).
\end{aligned}
$$

Neka je sada L proizvoljno linearno preslikavanje za koje je $\det L \neq 0$. Tada bar jedna kvartalna podmatrica od $[L]$, reda $n-1$, ima determinantu različitu od nule. Permutacijom koordinata, (tj. primjenom preslikavanja (i) i (ii)), možemo sa L preći na linearno preslikavanje kod kojeg se elementi te podmatrice nalaze u presjeku prvih $(n-1)$ vrsta i $(n-1)$ kolona. Ta podmatrica ima podmatricu reda $n-2$ čija je determinanta različita od nule. Poslije konačno mnogo dopuna preslikavanjima tipa (i) i (ii), prelazi se na preslikavanje $\widetilde{L}$ čija matrica (A^i_j) je takva, da je svaka podmatrica na dijagonali (A^j_i), $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$, nesingularna. Pošto se povratak sa $\widetilde{L}$ na L može obaviti pomoću preslikavanja tipa (i) i (ii), (jer $(T^i_\alpha)^{-1} = T^i_{\alpha^{-1}}$, $S^{-1}_{ij} = T^j_{-1} \circ S_{ij} \circ T^j_{-1}$), ostalo je da se dokaže da se preslikavanje $\widetilde{L}$ može predstaviti kao kompozicija preslikavanja tipa (i) i (ii). Za $n = 3$ taj dokaz izgleda ovako:

$$
\begin{aligned}
(x^1, x^2, x^3) &\longmapsto (a^1_1 x^1, x^2, x^3)\\
&\xmapsto{a^1_2 \neq 0} (a^1_1 x^1, a^1_2 x^2, x^3)\\
&\longmapsto (a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2, a^1_2 x^2, x^3)\\
&\longmapsto (a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2, x^2, x^3)\\
&\xmapsto{a^1_3 \neq 0} (a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2, x^2, a^1_3 x^3)\\
&\longmapsto (a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + a^1_3 x^3, x^2, a^1_3 x^3)\\
&\longmapsto (a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + a^1_3 x^3, x^2, x^3),
\end{aligned}
$$

pri čemu se pravi „skok“ iz prvog u četvrti red ako je $a^1_2 = 0$, odnosno iz četvrtog u sedmi ako je $a^1_3 = 0$.

Uvedimo oznaku $y^1 = a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + a^1_3 x^3$, pa produžimo:

$$
\begin{aligned}
(y^1, x^2, x^3) &\xmapsto{a^2_1 \neq 0} \left(\frac{a^2_1}{a^1_1} y^1, x^2, x^3 \right)\\
&\longmapsto \left(\frac{a^2_1}{a^1_1} y^1, \frac{-a^2_1 a^1_2 + a^1_1 + a^2_2}{a^1_1} x^2, x^3 \right)\\
&\longmapsto \left(\frac{a^2_1}{a^1_1} y^1, \frac{a^2_1}{a^1_1} y^1 + \frac{-a^2_1 a^1_2 + a^1_1 + a^2_2}{a^1_1} x^2, x^3 \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{a_1^2}{a_1^1}y^1, a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \frac{a_1^2}{a_1^1}x^3, x^3\right)\\
&\longmapsto \left(y^1, a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \frac{a_1^2}{a_1^1}x^3, x^3\right)\\
&\longmapsto \left(y^1, a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \frac{a_1^2}{a_1^1}x^3, \frac{-a_1^2 + a_3^2a_1^1}{a_1^1}x^3\right)\\
&\longmapsto (y^1, a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + a_3^2x^3, x^3).
\end{aligned}
$$

(Ponovo se prave direktni „skokovi“, ako je $a_1^2 = 0$ ili $a_3^2 = 0$). Analogno se izvrši i transformacija koordinate x^3 (bez mijenjanja y^1 i $y^2 = a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + +a_3^2x^3$). Dokaz za $n > 3$ se razlikuje od slučaja $n = 3$ time što su zapisivanja duža.

Dokaz teoreme 3.12. Ako je $\det A = 0$, onda AD leži u nekoj hiperravni prostora $\mathbf{R}^n$ i primjenom 3.11 lako slijedi da je slika mjerljivog skupa mjerljiv skup, pri čemu su obje strane jednakosti (11) jednake nuli.

Ako je $\det A \neq 0$ i D mjerljiv, onda iz 3.11 slijedi da je i AD mjerljiv, (jer je operator A ograničen i zato zadovoljava Lipschitzov uslov). Funkcija $\widetilde{\mu}$ definisana na klasi mjerljivih skupova sa

$$\widetilde{\mu}(D) = \mu(AD)$$

je invarijantna u odnosu na translacije, jer je

$$\widetilde{\mu}(D + x) = \mu(A(D + x)) = \mu(AD + Ax) = \mu(AD) = \widetilde{\mu}(D).$$

Na osnovu 3.10 postoji $c(A) > 0$ takav da je

$$\widetilde{\mu}(D) = c(A)\mu(D). \tag{12}$$

za svaki mjerljiv skup D.

Za $A = A_1 \circ A_2$ (12) dobijamo da je:

$$\mu(AD) = \mu(A_1(A_2D)) = c(A_1)\mu(A_2D) = c(A_1)c(A_2)\mu(D),$$

tj.

$$c(A_1A_2) = c(A_1)c(A_2).$$

Budući da je determinanta kompozicije linearnih preslikavanja jednaka proizvodu njihovih determinanti (I 12.8), ostaje da se dokaže da je $c(A) = |\det A|$ kad je A jedno od preslikavanja iz leme 3.13.

Ako je A tipa (i), onda je $\det A = \alpha$ i slika od kuba $[0,1]^n$ je paralelopiped čije su sve stranice, osim i-te, segment $[0,1]$ na j-toj osi, a i-ta $[0,\alpha]$ ili $[\alpha, 0]$, zavisno od toga da li je $\alpha > 0$ ili $\alpha < 0$. Zapremina toga kuba je $|\alpha|$, pa je $c(A) = |\alpha|$, tj. $c(A) = |\det A|$.

Ako je A tipa (ii), onda je $\det A = 1$ i slika n-torke $(x^1, \dots, x^n)$ je n-torka $(y^1, \dots, y^n) = (\dots, x^i + x^j, \dots)$. Pošto je $0 \leq x^j \leq 1$ to znači da je slika kuba $[0,1]^n$ skup čije koordinate zadovoljavaju uslove:

$$0 \leq y^k \leq 1 \quad \text{za } k \neq j, \qquad y^i \leq y^j \leq y^i + 1.$$

(Nacrtajte sliku). Neka je E skup onih tačaka iz $A([0,1]^n)$ kod kojih je $1 \leq y^j \leq y^i + 1$. Preostali dio od $A([0,1]^n)$ označimo sa E_2. Neka je $E_1 - e_j$ skup koji se dobija translacijom skupa E_1 za $-e_j$. Tada je $(E_1 - e_j) \cap E_2 = \varnothing$ i

$$[0,1]^n = (E_1 - e_j) \cup E_2.$$

Slijedi da je

$$\mu(A([0,1]^n)) = \mu(E_1) + \mu(E_2) = \mu(E_1 - e_j) + \mu(E_2) = \mu([0,1]^n)$$

i zato $c(A) = 1$, tj. ponovo $c(A) = |\det A|$ i dokaz teoreme je završen.

3.14. Posljedica. *Neka je $\mu(v_1, \dots, v_n)$ mjera paralelepipeda u $\mathbf{R}^n$ čije su ivice vektori $v_1, v_2, \dots, v_n$. Tada je*

$$\mu(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$$

(pri čemu se determinanta računa u odnosu na bilo koju ortonormiranu bazu u $\mathbf{R}^n$).

Dokaz. Neka je $(e_1, \dots, e_n)$ proizvoljna ortonormirana baza u $\mathbf{R}^n$ i $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ linearno preslikavanje određeno sa $Le_i = v_1$, $i = 1, \dots, n$. Tada je paralelepiped $(v_1, \dots, v_n)$ slika $L([0,1]^n)$ paralelepipeda-intervala $[0,1]^n$. Tvrđenje sada slijedi neposredno iz 3.12.

3.15. Posljedica. *Za mjeru $\mu(v_1, \dots, v_n)$ paralelopipeda $(v_1, \dots, v_n)$ važi*

$$\mu(v_1, \dots, v_n) = \sqrt{\det G(v_1, \dots, v_n)}$$

gdje je $\det G(v_1, \dots, v_n)$ Gramova determinanta vektora $v_1, \dots, v_n$ (I.13.15.5).

Dokaz. Neka je A matrica čiju j-tu kolonu čine koordinate vektora x_j u odnosu na neku ortonormiranu bazu u $\mathbf{R}^n$ i A^{T} njoj transponovana matrica. Tada je

$$A^{\mathrm{T}} \cdot A = \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ v_n^1 & \dots & v_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^n & \dots & v_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix},$$

tj. $A^{\mathrm{T}} \cdot A = G(v_1, \dots, v_n)$. Tvrđenje je sada posljedica relacije $\det(A^{\mathrm{T}} \cdot A) = (\det A)^2$ i tvrđenja 3.14.

Komentar. Ako je V^k k-dimenzionalan afini potprostor vektorskog prostora E^n, onda euklidska struktura E^n generiše euklidsku strukturu na V^k. Potprostor V^k sa generisanom euklidskom strukturom označimo sa E^k. Ta struktura generiše na E^k Jordanovu mjeru. Mjera paralelepipeda $(v_1, \dots, v_k)$ u E^k određena je sa $\mu(v_1, \dots, v_n) = |\det_{\mathcal{B}_k}(v_1, \dots, v_k)|$ u odnosu na proizvoljnu ortonormiranu bazu u E^k. Relacija

$$\mu(v_1, \dots, v_n) = \sqrt{\det G(v_1, \dots, v_n)}$$

omogućava računanje k-dimenzionalne mjere paralelepipeda $(v_1, \dots, v_k)$ u potprostoru E^k pomoću koordinata vektora $v_1, \dots, v^k$ u odnosu na koordiantne sisteme okolnog prostora E^n.

3.16. Posljedica. *Ako je $A \in \mathcal{J}$ i $\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$, onda je $\lambda A \in \mathcal{J}$ i $\mu(\lambda A) = |\lambda|^n \mu(A)$.*

3.17. Posljedica. *Ako je $A \in \mathcal{J}$ i $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ izometrija, onda je $LA \in \mathcal{J}$ i $\mu(LA) = \mu(A)$.*

Dokaz. Izometrija euklidskog prostora je kompozicija translacije i linearne izometrije. Za translaciju važi 3.10(a), a determinanta izometrije jednaka je 1.

3.18. Posljedica. *Pojam Jordanove mjere u afinom euklidskom prostoru E^n ne zavisi od izbora ortonormiranog koordinatnog sistema $(0, e_1, \dots, e_n)$, (u odnosu na koji se definiše).*

Dokaz. Svaki koordinatni sistem u E^n je, u stvari, bijekcija $h : E^n \to \mathbf{R}^n$, $h(x) = (x^1, \dots, x^n)$, koja na E^n prenosi prsten mjerljivih skupova i Jordanovu mjeru: $A \subset E^n$ je mjerljiv po Jordanu ako i samo ako je $h(A) \subset \mathbf{R}^n$ mjerljiv po Jordanu i

$$\mu_{E^n}(A) = \mu_{\mathbf{R}^n}(h(A)).$$

Ako su $h_1 : E^n \to \mathbf{R}^n$, $h_2 : E^n \to \mathbf{R}^n$ dva koordinatna sistema u E^n, onda je preslikavanje $L = h_2 \circ h_1^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ izometrija i $L(h_1(A)) = h_2(A)$, pa iz 3.17 slijedi da je

$$\mu_{1\,E^n}(A) = \mu_{\mathbf{R}^n}(h_1(A)) = \mu_{\mathbf{R}^n}(L(h_1(A))) = \mu_{\mathbf{R}^n}(h_2(A)) = \mu_{2\,E^n}(A).$$

3.19. Zadaci za vježbu

1. (a) Dokazati da je granica elementarnog skupa u $\mathbf{R}^n$ unija konačno mnogo $(n-1)$-dimenzionalnih paralelepipeda koji su paralelni koordinatnim hiperravnima pri čemu su ivice tih paralelepipeda paralelne koordinatnim osama.

(b) Dokazati da sfera u euklidskom prostoru $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, nije elementaran skup.

2. Dokazati da je lopta u $\mathbf{R}^n$ skup mjerljiv po Jordanu. Uputstvo: Kako je sfera $S^2(0,r)$ slika u $\mathbf{R}^3$ kompaktnog skupa $[0,2\pi] \times [0,\pi] \subset \mathbf{R}^2$ pomoću C^1-preslikavanja $(\varphi,\theta) \longmapsto (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$, to slijedi iz 3.11(a). Dokaz za $n > 3$ je analogan.
3. Neka je X topološki prostor i $A \subset X$, $B \subset X$. Dokazati da je $\partial(A\cup B) \subset \partial A \cup \partial B$, $\partial(A - B) \subset \partial A \cup \partial B$, pa potom još jednom dokazati da skupovi mjerljivi po Jordanu u $\mathbf{R}^n$ čine prsten.
4. Neka je k površina (Jordanova mjera) jediničnog kruga u euklidskoj ravni. Dokazati da je tada površina elipse čije su poluose a i b jednaka abk. Uputstvo: Elipsa čije su poluose a i b je slika jediničnog kruga pomoću linearnog preslikavanja A za koje je $\det A = ab$. (Da je $k = \pi$ dokazaćemo u 7.9).
5. Neka je A skup iracionalnih brojeva u $B = [0,1]$. Dokazati da skupovi A i $B - A$ nijesu mjerljivi po Jordanu na $\mathbf{R}$. Uputstvo: To slijedi iz 3.10.(1) i činjenice $\partial A = \partial B = [0,1]$.
6. Da li je Cantorov skup mjerljiv po Jordanu?
7. Ako je $\mu_n(v_1,\dots,v_n)$ mjera n-dimenzionalnog paralelepipeda čije su ivice $v_1,\dots,v_n$ i $\mu_{n-1}(v_1,\dots,v_{n-1})$ mjera $(n-1)$-dimenzionalnog paralelepipeda u $(n-1)$-dimenzionalnom euklidskom potprostoru E^{n-1} u kojem leže ivice $v_1,\dots,v_{n-1}$, dokazati da je
$$\mu_n(v_1,\dots,v_n) = h\,\mu_{n-1}(v_1,\dots,v_{n-1}),$$
gdje je h visina paralelepipeda $(v_1,\dots,v_n)$ koja odgovara bazi $(v_1,\dots,v_{n-1})$ (tj. h je određeno sa $v_n = v' + hv''$, $v' \in E^{n-1}$, $v'' \in (E^{n-1})^\perp$, $\|v''\| = 1$). Uputstvo:
$$\det G(v_1,\dots,v_n) = \det G(v_1,\dots,v_{n-1},hv'') = h^2 \det G(v_1,\dots,v_{n-1}),$$
(I 13.15.5(c)).
8. Neka je K kompaktan skup u $\mathbf{R}^n$ mjerljiv po Jordanu i $f : K \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija. Dokazati da grafik G funkcije f ima u $\mathbf{R}^{n+1}$ Jordanovu mjeru jednaku nuli.

4. Riemannov integral i klasa $\mathcal{R}$-integrabilnih funkcija

Kao što smo već rekli u Uvodu 1.1, svojstva (a)–(d) koja očekujemo od preslikavanja $(D,f) \longmapsto \int_D f$, uslovljavaju da familija skupova koja se razmatra bude prsten, a familija funkcija vektorski prostor. Uslov 1.1(d) traži da skup funkcija sadrži karakteristične funkcije svih mjerljivih skupova, a time i sve njihove linearne kombinacije. Pošto te linearne kombinacije čine vektorski prostor, to značida svaki prsten generiše najmanji vektorski prostor $\mathcal{S}$ funkcija, koji mora biti potprostor svakog prostora funkcija za koje će integral biti definisan. Svako proširenje prstena skupova generiše proširenje njemu odgovarajućeg minimalnog prostora funkcija, ali priroda odnosa te dvije klase ostaje uvijek ista i mi ćemo je sada opisati. Sadržajno, naša pažnja je posvećena najširem prstenu kojim trenutno raspolažemo — prstenu $\mathcal{J}$ skupova mjerljivih po Jordanu, ali bi bilo korisno da čitalac u drugom čitanju za $\mathcal{J}$ uzme proizvoljni prsten i proizvoljnu aditivnu funkciju skupa μ na njemu, i tako nađe mjesta na kojima je pretpostavka da skupovi leže u euklidskom prostoru, bitna.

4.1. Proste funkcije. Funkcija $s : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ naziva se *prostom* ako postoji konačno mnogo disjunktnih skupova $E_1, \ldots, E_m$ iz prstena $\mathcal{J}$ i realni brojevi $c_1, \ldots, c_m$ takvi da je

$$s(x) = \begin{cases} c_i, & x \in E_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ 0, & x \notin \bigcup_{i=1}^m E_i. \end{cases} \tag{1}$$

Ekvivalent uslov:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \kappa_{E_i} \tag{2}$$

gdje je $\kappa_{E_i} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ karakteristična funkcija skupa E_i.

Prosta funkcija ima više reprezentacija (1), ali samo jednu takvu reprezentaciju kod koje je $c_i \neq c_j$ za $i \neq j$, tj. $E_i = f^{-1}(c_i)$. Tu reprezentaciju zvaćemo *kanonskom*.

Ako se prsten $\mathcal{J}$ zamijeni prstenom $\mathcal{E}$ elementarnih skupova u $\mathbf{R}^n$, onda se prosta funkcija naziva *stepenastom*.

4.2. Integral proste funkcije. Neka je $\mathcal{S}$ vektorski prostor prostih funkcija koji je generisan prstenom $\mathcal{J}$. Ako postoji preslikavanje $\int : \mathcal{J} \times \mathcal{S} \to \mathbf{R}$ koje ima svojstva 1.1(a)–(d), onda iz (a), (b), (d) slijedi da bi ono moralo biti određeno sa:

$$\int_D s = \sum_{i=1}^{m} c_i \mu(D \cap E_i), \tag{3}$$

gdje su c_i iz (bilo koje) reprezentacije (2). Provjerimo najprije da je sa (3) zaista definisano jedno preslikavanje iz $\mathcal{J} \times \mathcal{S}$ u $\mathbf{R}$, tj. da desna strana relacije (3) ne zavisi od izbora reprezentacije (2). Neka je $\{\widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_k\}$ skup vrijednosti funkcije s i $A_j = s^{-1}(\widetilde{c}_j) = \bigcup_{c_i = \tilde{c}_j} E_i$. Pošto je μ aditivna, slijedi da je

$$\widetilde{c}_j \mu(A_j \cap D) = \sum_{c_i = \tilde{c}_j} \mu(E_i \cap D) = \sum_{c_i = \tilde{c}_j} c_i \mu(E_i \cap D),$$

što znači da je suma u (3) za proizvoljnu reprezentaciju (2) jednaka sumi za kanonsku reprezentaciju.

4.3. Definicija. *Integralom proste funkcije* $s : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ (koja ima reprezentaciju (2)) na (ili po) mjerljivom skupu D, zvaćemo broj $\int_D s$ određen relacijom (3).

4.4. Teorema. *Integral proste funkcije* $\int : \mathcal{J} \times \mathcal{S} \to \mathbf{R}$ *ima sljedeća svojstva:*

(a) $\displaystyle\int_D (f+g) = \int_D f + \int_D g;\ \int_D \alpha f = \alpha \int_D f,$

(b) *ako je* $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, *onda je* $\displaystyle\int_{D_1 \cup D_2} = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f,$

(c) *ako je* $f \le g$, *onda je* $\int_D f \le \int_D g$,

(d) $\displaystyle\int_D \kappa_D = \mu(D)$, *gdje je* $\mu(D)$ *— Jordanova mjera skupa* D.

Dokaz. Neka su $\{A_1, \ldots, A_m\}$ i $\{B_1, \ldots, B_k\}$ skupovi koji se pojavljuju u kanonskim reprezentacijama (2) redom stepenastih funkcija f i g. Tada su skupovi $E_1, \ldots, E_p$ dobijeni kao presjeci $A_i \cap B_j$ i razlike $A_i - B_j$ i $B_j - A_i$ mjerljivi, pa f i g imaju reprezentacije:

$$f = \sum_{i=1}^{p} a_i \kappa_{E_i}, \quad g = \sum_{i=1}^{p} b_i \kappa_{E_i}.$$

Slijedi da je

$$\alpha f + \beta g = \sum (\alpha a_i + \beta b_i) \kappa_{E_i},$$

a odatle svojstvo (a). Dokaz svojstva (c) prepuštam čitaocu uz uputstvo, da je uz prisustvo svojstva (a) relacija $\int_D f \ge \int_D g$ ekvivalentna sa $\int_D (f-g) \ge 0$. Na kraju, za $D_1, D_2 \in \mathcal{J}$, po definiciji 4.3 je

$$\int_{D_2} \kappa_{D_1} = \mu(D_1 \cap D_2).$$

4.5. Gornji i donji integral. Sljedeći cilj nam je da proširimo klasu funkcija za koje možemo definisati preslikavanje $(D, f) \longmapsto \int_D f$ u okviru tehnike takozvanog Riemannovog integrala. Preslikavanje $(D, f) \longmapsto \int_D f$ definisano na $\mathcal{J} \times \mathcal{S}$ moguće je proširiti na klasu funkcija koje se mogu dobro aproksimirati prostim funkcijama. Geometrijska intuicija i relacije (a), (b), (c) i (d) iz uvoda u 1.1, čine osnovu ideje koju ćemo realizovati.

4.6. Definicija. Neka je $D \subset \mathbf{R}^n$ skup mjerljiv po Jordanu i $f : D \to \mathbf{R}$ ograničena funkcija. *Gornjim* i *donjim integralom od* f *na* (*po*) D nazivaju se redom brojevi

$$\overline{\int_D} f = \inf_{f \le s} \int_D s, \quad \underline{\int_D} f = \sup_{s \le f} \int_D s,$$

gdje $f \leq s$ znači $f(x) \leq s(x)$ za svaki $x \in D$ i analogno za $s \leq f$.

Ako je $D \in \mathcal{J}$, $D \subset A$ i $f : A \to \mathbf{R}$ ograničena na D, onda se *gornjim* i *donjim integralom funkcije f na skupu D* nazivaju redom brojevi $\overline{\int}_D f = \overline{\int}_D f_{|D}$, $\underline{\int}_D f = \underline{\int}_D f_{|D}$, gdje je $f_{|D}$ restrikcija od f na D.

Ako je $s = \sum c_i \kappa_{D_i}$, $\widetilde{s} = \sum c_i \kappa_{D_i \cap D}$, onda je $\widetilde{s}(x) = 0$ za $x \notin D$. Međutim, $\overline{\int}_D s = \overline{\int}_D \widetilde{s}$. To znači da se u definiciji gornjeg (donjeg) integrala možemo ograničiti na proste funkcije čiji nosač leži u D. (*Nosačem* funkcije s naziva se skup $\operatorname{supp} s = \overline{\{x : s(x) \neq 0\}}$).

Ako je s prosta funkcija, onda je, očigledno,

$$\underline{\int}_D s = \overline{\int}_D s = \int_D s,$$

(tj. i gornji i donji integral su ekstenzije integrala proste funkcije).

Da bi mogli da posmatramo gornji i donji integral kao preslikavanja definisana na skupu (raznih) parova (D, f) nama će ponekad odgovarati da za sve funkcije u razmatranju podrazumijevamo da su definisane i ograničene na svakom skupu mjerljivom po Jordanu. Taj uslov izdvaja sve funkcije definisane na $\mathbf{R}^n$ koje su ograničene na svakom ograničenom podskupu od $\mathbf{R}^n$. Te funkcije zvaćemo *lokalno ograničenim*. Funkciju f koja je prvobitno definisana samo na skupu D (i ograničena), uključujemo u tu klasu tako što f zamijenimo njenom ekstenzijom $\widehat{f}$, koja je definisana

$$\widehat{f} = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

i ekstenziju ponovo označimo sa f. Takvo poistovjećivanje funkcija f i $\widehat{f}$ je opravdano, jer je

$$\underline{\int}_D f = \underline{\int}_D \widehat{f}, \quad \overline{\int}_D f = \overline{\int}_D \widehat{f}.$$

(To se dobija trivijalno ako se, saglasno gornjoj napomeni, definicija primijeni sa prostim funkcijama čiji nosač leži u D — zadatak 1).

4.7. Napomena. 1. Familija $\{D_1, \dots, D_m\}$ disjunktnih skupova takvih da je $D = \bigcup_{i=1}^m D_i$ naziva se *podjelom* ili *razbijanjem skupa D*. (Svaka reprezentacija $s = \sum_{i=1}^m c_i \kappa_{\tilde{D}_i}$ proste funkcije s generiše familiju $D_1, \dots, D_m$, $D_i = D \cap \widetilde{D}_i$ koja je jedno razbijanje skupa D). Za svaku podjelu $P = \big\{D_1, \dots, D_m\big\}$ skupa D i funkciju f ograničenu na D, neka je

$$M_i = \sup_{x \in D_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in D_i} f(x), \quad u_P = \sum_{i=1}^m M_i \kappa_{D_i}, \quad l_P = \sum_{i=1}^m m_i \kappa_{D_i}. \tag{4}$$

Ako je podjela P generisana nekom reprezentacijom proste funkcije s, onda ćemo u_P i l_P označavati i sa u_s i l_s. Jasno je da je u $u_s(x) \geq s(x)$ (respektivno $s(x) \geq l_s(x)$)

za $x \in D$. Slijedi da su funkcije u_s i l_s „bliže" f nego s i da se u definiciji gornjeg i donjeg integrala, možemo ograničiti na familije prostih funkcija u_P i l_P koje su generisane podjelama P skupa D. Uvodi se sljedeća terminologija: Za svako razbijanje $P = \{D_1, \dots, D_m\}$ skupa D na Jordanove skupove $D_1, \dots, D_m$ brojevi $\overline{I}(f,P) = \int_D u_P$, $\underline{I}(f,P) = \int_D l_P$:

$$\overline{I}(f,P) = \sum_{i=1}^{m} M_i \mu(D_i), \quad \underline{I}(f,P) = \sum_{i=1}^{m} m_i \mu(D_i), \tag{5}$$

nazivaju se redom *gornjom* i *donjom integralnom sumom funkcije* f *u odnosu na podjelu* P. Saglasno malo prije rečenom o funkcijama u_s, l_s, imamo da je

$$\overline{\int_D} f = \inf_P \overline{I}(f,P), \quad \underline{\int_D} f = \sup_P \underline{I}(f,P). \tag{6}$$

(Iz (5) slijedi da relacije (6) važe i ako u definiciji podjele dopustimo da je $D_i \cap D_j \neq \varnothing$ uz uslov $\mu(D_i \cap D_j) = 0$).

Ako su P i Q dva razbijanja skupa D, onda se Q naziva *usitnjenjem* podjele P, ako je svaki element iz Q sadržan u nekom elementu iz P. Pošto $m = \inf_{x \in D} f(x)$ ne opada, a $M = \sup_{x \in D} f(x)$ ne raste kad se skup D smanjuje, a integral prostih funkcija ne zavisi od reprezentacije (2), imamo da je za usitnjenje Q podjele P

$$\underline{I}(f,P) \le \underline{I}(f,Q) \le \overline{I}(f,Q) \le \overline{I}(f,P).$$

2. Neka je I^n proizvoljan interval takav da je $I^n \supset D$. Iz napomene 1, relacija (2) i (4), odnosno relacija (3) i (5), slijedi da je

$$\overline{\int_D} f = \inf_P \overline{I}(f\kappa_D, P), \quad \underline{\int_D} f = \sup \underline{I}(f\kappa_D, P), \tag{7}$$

gdje je P proizvoljno razbijanje intervala I^n, κ_D karakteristična funkcija skupa D a $\overline{I}(f\kappa_D, P)$ i $\underline{I}(f\kappa_D, P)$ gornja i donja integralna suma funkcije $f\kappa_D$ na intervalu I^n. Nije teško vidjeti da se u relaciji (7) možemo ograničiti na one podjele P čiji elementi su takođe intervali.

4.8. Lema. *Neka je $\mathcal{J}$ prsten skupova mjerljivih po Jordanu, a $\mathcal{B}$ vektorski prostor lokalno ograničenih funkcija. Gornji i donji integral $\overline{\int} : \mathcal{J} \times \mathcal{B} \to \mathbf{R}$, $\underline{\int} : \mathcal{B} \to \mathbf{R}$, imaju sljedeća svojstva:*

(a) *Ako je $D \in \mathcal{J}$, $f \in \mathcal{B}$, $g \in \mathcal{B}$, onda je*

$$\overline{\int_D}(f+g) \le \overline{\int_D} f + \overline{\int_D} g, \quad \underline{\int_D}(f+g) \ge \underline{\int_D} f + \underline{\int_D} g,$$

$$\overline{\int}_D cf = c\overline{\int}_D f \quad ako\ je\ c > 0, \qquad \overline{\int}_D cf = c\underline{\int}_D f \quad ako\ je\ c < 0.$$

(b) *Ako je* $D_1 \in \mathcal{J}$, $D_2 \in \mathcal{J}$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ *i* $f \in \mathcal{B}$, *onda je*

$$\overline{\int}_{D_1 \cup D_2} f \geq \overline{\int}_{D_1} f + \overline{\int}_{D_2} f, \qquad \underline{\int}_{D_1 \cup D_2} f \leq \underline{\int}_{D_1} f + \underline{\int}_{D_2} f.$$

(c) *Ako je* $D \in \mathcal{J}$, $f \in \mathcal{B}$, $g \in \mathcal{B}$ *i* $f(x) \leq g(x)$ *za* $x \in D$, *onda je*

$$\overline{\int}_D f \leq \overline{\int}_D g, \qquad \underline{\int}_D f \leq \underline{\int}_D g.$$

(d) *Za proizvoljan skup* D *mjerljiv po Jordanu je*

$$\overline{\int}_D \kappa_D = \underline{\int}_D \kappa_D = \mu(D).$$

(d') *Za proizvoljan ograničen skup* A *i proizvoljan skup* D *mjerljiv po Jordanu takav da je* $A \subset D$, *važi*

$$\overline{\int}_D \kappa_A = \mu^*(A), \qquad \underline{\int}_D \kappa_A = \mu_*(A).$$

Dokaz. (a) Ako je $s_1 \geq f$ i $s_2 \geq g$ onda je $s_1 + s_2 \geq f + g$, pa slijedi da je

$$\overline{\int}_D (f+g) \leq \int_D (s_1 + s_2) = \int_D s_1 + \int_D s_2.$$

Infimum desne strane po s_1, s_2 je jednak $\overline{\int}_D f + \overline{\int}_D g$ i prvo tvrđenje za gornji integral je dokazano. Analogno se dokazuje i tvrđenje za donji integral.

Ako je $c \neq 0$, onda je s prosta funkcija ako i samo ako je cs prosta. Zato je za $c > 0$

$$\overline{\int}_D cf = \inf_{f \leq s} \int_D cs = c \inf_{f \leq s} \int_D s = c\overline{\int}_D f,$$

a za $c < 0$

$$\overline{\int}_D cf = \inf_{s \leq f} \int_D cs = c \sup_{s \leq f} \int_D s = c\underline{\int}_D f.$$

(b) Prva nejednakost slijedi iz

$$\inf_{s \geq f} \int_{D_1 \cup D_2} s = \inf_{s \geq f} \left(\int_{D_1} s + \int_{D_2} s \right) \geq \inf_{s \geq f} \int_{D_1} s + \inf_{s \geq f} \int_{D_2} s.$$

Druga se dobija analogno.

(c) Ako je $g \le s$, onda je i $f \le s$ i zato je $\inf_{f\le s}\int s \le \inf_{g\le s}\int s$ itd.

(d) κ_D je prosta funkcija kad je $D \in \mathcal{J}$, pa je

$$\underline{\int_D} \kappa_D = \overline{\int_D} \kappa_D = \int_D \kappa_D.$$

(d') Neka je je $s = \sum c_i \kappa_{E_i}$ kanonska reprezentacija proste funkcije s koja zadovoljava uslov $s(x) \ge \kappa_A(x)$ za $x \in D$. Tada je $c_i \ge 1$ za svaki E_i takav da je $E_i \cap A \ne \varnothing$ i $A \subset \bigcup\{E_i : E_i \cap A \ne \varnothing\}$. Slijedi da je

$$\mu^*(A) \le \sum_{E_i \cap A \ne \varnothing} \mu(E_i \cap D) \le \sum c_i \mu(E_i \cap D) = \int_D s,$$

odnosno

$$\mu^*(A) \le \underline{\int_D} \kappa_A.$$

S druge strane, za svaki elementarni skup $E \supset A$ je $\kappa_A \le \kappa_E$, pa koristeći (c) dobijamo da je

$$\underline{\int_D} \kappa_A \le \underline{\int_D} \kappa_E = \mu(E \cap D) \le \mu(E).$$

Odatle slijedi da je

$$\underline{\int_D} \kappa_A \le \mu^*(A)$$

i dokaz tvrđenja (d), a s njim i leme, je završen.

Da se za proizvoljnu ograničenu funkciju znak $\le$ u (a) ne može zamijeniti sa $=$, pokazuje sljedeći

4.9. Primjer. Neka je $A = \{(x^1, x^2) : x^1 - \text{racionalan}\}$, $B = \mathbf{R}^2 - A$. Neka su f i g karakteristične funkcije redom skupova A i B. Odredimo gornji i donji integral funkcija f i g na intervalu $I^2 = [0,1] \times [0,1]$. Ako je P podjela intervala I^2, onda u svakom intervalu $S \in P$ za koji je $\mu(S) \ne 0$, ima tačaka i iz A i iz B. Zato je $M_S = 1$, $m_S = 0$ za obje funkcije f i g. Slijedi da je

$$\underline{I}(f,P) = \underline{I}(g,P) = \sum_{s\in P} 0 \cdot \mu(S) = 0,$$

$$\overline{I}(f,P) = \overline{I}(g,P) = \sum_{s\in P} 1 \cdot \mu(S) = \mu(I^2) = 1$$

$$\underline{\int_{I^2}} f = \underline{\int_{I^2}} g = 0, \quad \overline{\int_{I^2}} f = \overline{\int_{I^2}} g = 1.$$

Pošto je $f+g=1$, na osnovu 4.8(d) imamo da je

$$\underline{\int}_{I^2}(f+g) > \underline{\int}_{I^2} f + \underline{\int}_{I^2} g, \quad \overline{\int}_{I^2}(f+g) < \overline{\int}_{I^2} f + \overline{\int}_{I^2} g.$$

4.10. Riemannov integral. Iz prethodnog primjera vidimo da gornji i donji integral nemaju svojstva koja očekujemo od funkcije $(D,f) \longmapsto \int_D f$. Ako se ograničimo na klasu $\mathcal{R}$ funkcija f na kojoj gornji i donji integral imaju istu restrikciju, onda će ta restrikcija imati željena svojstva 1.1(a)–(d).

4.11. Definicija. Neka je D skup mjerljiv po Jordanu i $f : D \to \mathbf{R}$ funkcija ograničena na D (ili proizvoljna lokalno ograničena funkcija $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$). Ako je $\overline{\int}_D f = \underline{\int}_D f$, onda se kaže da je f *integrabilna na D po Riemannu* ili da je f *$\mathcal{R}$-integrabilna na D*, a zajednička vrijednost gornjeg i donjeg integrala naziva se *Riemannovim integralom funkcije f na skupu D* i označava sa $\int_D f$ ili $\int_D f(x)\,dx$. (Na osnovu 4.6 Riemannov integral je ekstenzija integrala proste funkcije. otuda ista oznaka za oba integrala).

4.12. Teorema. *Riemannov integral ima sljedeća svojstva:*

(a) *Klasa $\mathcal{R}(D)$ funkcija $f : D \to \mathbf{R}$ (ili $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$) integrabilnih na $D \in \mathcal{J}$ čini vektorski prostor, a $\mathcal{R}$-integral $f \longmapsto \int_D f$ je linearna funkcija na tom prostoru. Drugim riječima, ako su funkcije f i g integrabilna na $D \in \mathcal{J}$, onda su i funkcije $f+g$ i cf integrabilne na D i važi*

$$\int_D (f+g) = \int_D f + \int_D g, \quad \int_D cf = c\int_D f.$$

(b) *Ako je $f \in \mathcal{R}(D_1)$, $f \in \mathcal{R}(D_2)$ i $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, onda je $f \in \mathcal{R}(D_1 \cup D_2)$ i*

$$\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

(c) *Ako je $D \in \mathcal{J}$, $f \in \mathcal{R}(D)$, $g \in \mathcal{R}(D)$ i $f(x) \le g(x)$ za $x \in D$, onda je*

$$\int_D f \le \int_D g.$$

(d) *Ako je $D \in \mathcal{J}$, onda je karakteristična funkcija κ_D skupa D integrabilna na D i važi*

$$\int_D \kappa_D = \mu(D).$$

(d') $\displaystyle\int_D 1 = \mu(D)$.

(e) (i) *Ako je* $D \in \mathcal{J}$ *i* $f \in \mathcal{R}(D)$, *onda je* $f \in \mathcal{R}(D')$ *za svaki skup* $D' \subset D$ *mjerljiv po Jordanu.* (*Specijalno, to znači da iz* $D_1 \in \mathcal{J}$, $D_2 \in \mathcal{J}$, $f \in \mathcal{R}(D_1)$, $f \in \mathcal{R}(D_2)$ *slijedi da je* $f \in \mathcal{R}(D_1 \cap D_2)$, $f \in \mathcal{R}(D_1 - D_2)$ *i* $f \in \mathcal{R}(D_1 \cup D_2)$. *Pritom je* $f \cdot \kappa_{D'} \in \mathcal{R}(D)$ *i važi*

$$\int_{D'} f = \int_D f\kappa_{D'}.$$

(ii) *Ako je* $f \in \mathcal{R}(D')$, $D' \subset D \in \mathcal{J}$, *onda je* $f \cdot \kappa_{D'} \in \mathcal{R}(D)$ *i važi jednakost* (i).

Dokaz. Tvrđenja (a), (b), (c) i (d) su trivijalne posljedice leme 4.8.

Tvrđenje (e) (i) je posledica tvrđenja (b) leme 4.8. Naime iz

$$\overline{\int_D} f \geq \overline{\int_{D'}} f + \overline{\int_{D-D'}} f, \quad \underline{\int_D} f \leq \underline{\int_{D'}} f + \underline{\int_{D-D'}} f$$

i pretpostavke $f \in \mathcal{R}(D)$, slijedi da je

$$\Big(\overline{\int_{D'}} f - \underline{\int_{D'}} f\Big) + \Big(\overline{\int_{D-D'}} - \underline{\int_{D-D'}} f\Big) = 0.$$

Ostaje još da primijetimo da je zbir dva nenegativna realna broja jednak nuli ako i samo ako su oba sabiraka jednaki nuli.

4.13. Klasa $\mathcal{R}$-integrabilnih funkcija. Činjenica da su gornji i donji integral neke funkcije jednaki, ne govori nam mnogo o svojstvima funkcije. Zato nam je nužna unutrašnja karakterizacija $\mathcal{R}$-integrabilnih funkcija, koja se može efektivno provjeravati.

4.14. Lema (osnovna). *Ograničena funkcija* $f : D \to \mathbf{R}$ *je integrabilna na* D *ako i samo ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoje proste funkcije* s_1 *i* s_2 *takve da je* $s_1 \leq f \leq s_2$ *i* $\int_D s_2 - \int_D s_1 < \varepsilon$.

(Iz napomene 4.7.2 slijedi da se u osnovnoj lemi možemo ograničiti na funkcije $u = \sum_{i=1}^k M_i\kappa_{D_i}$, $l = \sum_{i=1}^k m_i\kappa_{D_i}$, gdje je $P = \{D_1, \dots , D_k\}$ podjela skupa D).

Dokaz. Neka je f integrabilna i $\varepsilon > 0$. Tada postoje proste funkcije s_1 i s_2, takve da je $s_1 \leq f \leq s_2$, $\int_D s_2 < \overline{\int_D} f + \varepsilon/2$, $\int_D s_1 > \underline{\int_D} f - \varepsilon/2$. Slijedi da je $\int_D s_2 - \int_D s_1 < \varepsilon$. Obratno, ako je uslov leme zadovoljen za svaki $\varepsilon > 0$, onda iz 4.6 i 4.8(c) slijedi da je $0 \leq \overline{\int_D} f - \underline{\int_D} f < \varepsilon$ za svaki $\varepsilon > 0$. To znači da je $\overline{\int_D} f = \underline{\int_D} f$ i dokaz leme je završen.

4.15. Komentar. Za proizvoljnu podjelu P skupa $D \in \mathcal{J}$ i proizvoljni $\varepsilon > 0$ je

$$\overline{I}(f,P) - \underline{I}(f,P) = \sum_{S \in P} (M_S - m_S)\mu(S)$$
$$= \sum{}' (M_S - m_S)\mu(S) + \sum{}'' (M_S - m_S)\mu(S),$$

gdje je sa $\sum'$ označena suma po onim $S \in P$ na kojima je $M_S - m_S < \varepsilon/(2\mu(I))$, a sa $\sum''$ suma po ostalim $S \in P$. U prvoj sumi je $\sum'\mu(S) < \mu(I)$, u drugoj je $M_S - m_S < 2M$, gdje je $M > 0$ takav da je $|f(x)| < M$ za $x \in D$. Slijedi da je

$$0 \le \overline{\int_D} f - \underline{\int_D} f \le \overline{I}(f,P) - \underline{I}(f,P) < \frac{\varepsilon}{2} + 2M \sum{}'' \mu(S).$$

Naslućujemo da je bogatstvo skupa tačaka prekida funkcije f ono svojstvo funkcije kojim se može okarakterisati njena integrabilnost. Na primjer, očigledno, f je integrabilna ako skup njenih tačaka prekida ima svojstvo: za svaki $\varepsilon > 0$ postoji podjela P takva da je $\sum''\mu(S) < \varepsilon/(4M)$. Odatle lako slijedi da je f integrabilna ako taj skup ima Jordanovu mjeru nula. Međutim, u zadatku 9 dat je primjer integrabilne funkcije čiji skup tačaka prekida nije Jordanove mjere nula. To vodi k ideji da se nađe precizniji način mjerenja „malih“ skupova, nego što je spoljašnja Jordanova mjera.

4.16. Skup Lebesgueove mjere nula. Za skup $A \subset \mathbf{R}^n$ kaže se da ima *Lebesgueovu mjeru nula*, odnosno da je *Lebesgueove mjere nula*, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji niz (I_k^n) intervala takav da je

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^n \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k^n) < \varepsilon.$$

S obzirom da za svaki interval I_k^n postoji otvoren interval J_k^n takav da je $I_k^n \subset J_k^n$ i $\mu(J_k^n) < \mu(I_k^n) + \varepsilon/2^k$, slijedi da se u definiciji skupa (Lebesgueove) mjere nula mogu uzeti otvoreni intervali $\big(\sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon/(2^k)) = \varepsilon \big)$.

Kad je neki uslov zadovoljen svuda osim u tačkama skupa koji ima Lebesgueovu mjeru nula, kaže se da taj uslov važi *skoro svuda* (skraćeno s.s.). (Kad je neko svojstvo narušeno ma skupu Jordanove mjere nula, govorićemo, ponekad, da važi skoro svuda u odnosu na Jordanovu mjeru).

Svaki interval I^n može se razbiti na prebrojivo mnogo disjunktnih podintervala (I_k^n) takvih da je $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k^n) = \mu(I^n)$. Odatle slijedi da je svaki skup Jordanove mjere nula u isto vrijeme i skup Lebesgueove mjere nula. Obratno tvrđenje ne važi kao što to pokazuje na primjer skup $\mathbf{N}$ prirodnih brojeva koji ima Lebesgueovu, ali ne i Jordanovu mjeru nula, (vidi primjere 4.17). Jasno je međutim, da kompaktan skup koji ima Lebesgueovu mjeru nula ima i Jordanovu mjeru nula. (Kad se iz prebrojivog pokrivača (I_k^n) otvorenim intervalima, ukupne zapremine $\sum \mu(I_k^n) < \varepsilon$, izdvoji konačan potpokrivač, onda i taj konačan potpokrivač ima ukupnu zapreminu $< \varepsilon$.

4.17. Primjeri. (a) Najviše prebrojiv skup ima Lebesgueovu mjeru nula.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Poređajmo elemente skupa A u niz $a_1, a_2, a_3, \ldots$ i svaki a_i prekrijmo intervalom I_i^n zapremine $\mu(I_i^n) < \varepsilon/(2^i)$. Tada je $A \subset \bigcup_i I_i^n$ i $\sum_i \mu(I_i^n) < \varepsilon$.

(b) Unija najviše prebrojive familije skupova mjere nula je skup Lebesgueove mjere nula.

Dokaz. Neka je (A_k) niz skupova mjere nula. Neka je $\varepsilon > 0$. Za svaki A_k postoji pokrivač $(I_{k,m}^n)$ takav da je $\sum_m \mu(I_{k,m}^n) < \varepsilon/2^k$. Familija $(I_{k,m}^n)_{(m,k)\in \mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ je prebrojiva (jer je skup $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ prebrojiv). Pošto za red sa pozitivnim članovima važi asocijativni zakon III.4.3, slijedi da je $\sum_{m,k} \mu(I_{k,m}) < \varepsilon$.

(c) Podskup skupa mjere nula je i sam mjere nula.

(d) Interval I^n sa nepraznom unutrašnjošću nije skup mjere nula.

4.19. Teorema. (Lebesgueov kriterijum integrabilnosti). *Ograničena funkcija $f : D \to \mathbf{R}$ integrabilna je na skupu D mjerljivom po Jordanu ako i samo ako je neprekidna skoro svuda na D.*

Dokaz. Neka je $I^n \supset D$ zatvoreni interval i $\widehat{f} : I^n \to \mathbf{R}$ ekstenzija od f takva da je $\widehat{f}(x) = 0$ za $x \in I^n - D$. Tada je $f \in \mathcal{R}(D)$ ako i samo ako je $\widehat{f} \in \mathcal{R}(I^n)$, (zadatak 1). Pošto je ∂D skup (Jordanove) mjere nula a skupovi tačaka prekida funkcija f i $\widehat{f}$ se razlikuju eventualno za podskup od ∂D, slijedi da je dovoljno dokazati teoremu za slučaj $D = I^n$. Neka je $f : I^n \to \mathbf{R}$ integrabilna. Dokazaćemo najprije da skup $A_\delta = \{x \in I^n : \operatorname{osc}(x,t) \geq \delta\}$ ima Jordanovu mjeru nula. Iz osnovne leme 4.14 slijedi da postoji podjela P takva da je $\sum_{S\in P}(M_S - m_S)\mu(S) < \varepsilon \cdot \delta$. Neka je Q familija onih intervala podjele P na kojima je $M_S - m_S \geq \delta$. Q je pokrivač skupa A_δ. Slijedi da je

$$\sum_{S\in Q} \mu(S) = \frac{1}{\delta} \sum_{S\in Q} \delta \cdot \mu(S) \leq \frac{1}{\delta} \sum_{S\in Q} (M_S - m_S)\mu(S) \leq \frac{1}{\delta} \varepsilon \cdot \delta = \varepsilon.$$

Dokazali smo da se za svaki $\varepsilon > 0$, A_δ može prekriti sa konačno mnogo intervala ukupne zapremine manje od ε. To znači da je A_δ skup mjere nula. Skup A tačaka prekida funkcije f ima reprezentaciju $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$. Iz primjera 4.17 slijedi da A ima Lebesgueovu mjeru jednaku nuli i neophodnost uslova teoreme je dokazana.

Obratno, neka je f neprekidna skoro svuda (i ograničena). Dokazaćemo integrabilnost primjenom osnovne leme 4.14. Neka je $\varepsilon > 0$. Saglasno komentaru 4.15

treba da nađemo podjelu P takvu da bude $\sum'' \mu(S) < \varepsilon/(4M)$, gdje se sumiranje vrši po onim intervalima podjele P na kojima je $M_S - m_S \geq \varepsilon/(2\mu(I^n))$. Dakle, pozabavimo se skupom $A_{\varepsilon/(2\mu(I^n))}$. Taj skup ima Lebesgueovu mjeru jednaku nuli (jer je podskup skupa svih tačaka u kojima f ima prekid). Skup $A_{\varepsilon/(2\mu(I^n))}$ je zatvoren podskup (II.18.9) kompakta I^n, pa je kompaktan. Dakle, $A_{\varepsilon/(2\mu(I^n))}$ ima Jordanovu mjeru nula. Slijedi da postoji konačno mnogo otvorenih intervala $I_1^n, \dots, I_k^n$ koji pokrivaju skup $A_{\varepsilon/(2\mu(I^n))}$, koji imaju ukupnu zapreminu manju od $\varepsilon/(4M)$. Za svaki $x \in B = I^n - \bigcup_{i=1}^m I_i$ je $\operatorname{osc}(x, f) < \varepsilon/(2\mu(I^n))$. Postoji zato za svaki $x \in B$ otvoreni paralelopiped $J_x \ni x$ takav da je $\operatorname{osc}(f, J_x) < \varepsilon/(2\mu(I^n))$. Pošto je B kompaktan, postoji konačno mnogo ovih paralelopipeda $J_1, \dots, J_m$ koji pokrivaju skup B. Neka je sada P proizvoljna podjela takva da je za svaki $S \in P$, $S \subset I_i^n$ za neki $i = 1, \dots, k$ ili $S \subset J_j$ za neki $j = 1, \dots, m$. Za $S \subset J_j$ je $M_S - m_S < \varepsilon/(2\mu(I^n))$ po izboru paralelopipeda J_j. Dalje, $\sum_{S \subset I_i} \mu(S) < \varepsilon/(4M)$. To znači da je u oznakama komentara 4.15, $\sum'' \mu(S) < \varepsilon/(4M)$ i dokaz teoreme je završen.

4.20. Teorema. *Neka je $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ lokalno ograničena funkcija. Tada je f integrabilna na svakom skupu D mjerljivom po Jordanu ako i samo ako je f neprekidna skoro svuda u $\mathbf{R}^n$.*

Dokaz. Pošto je svaki interval I^n mjerljiv po Jordanu, direktno tvrđenje slijedi iz 4.19 i činjenice da se $\mathbf{R}^n$ može predstaviti kao unija prebrojive kolekcije intervala. Obratno, ako je f neprekidna s.s. na $\mathbf{R}^n$, ona je ona neprekidna s.s. na svakom skupu D mjerljivom po Jordanu (tvrđenje ponovo slijedi iz 4.19).

4.21. Zaključak. Za Riemannov integral $(D, f) \longmapsto \int_D f$ može se računati da je definisan na proizvodu $\mathcal{J} \times \mathcal{F}$ prstena $\mathcal{J}$ skupova mjerljivih po Jordanu i vektorskog prostora $\mathcal{F}$ funkcija $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ neprekidnih s.s. i lokalno ograničenih. Tada Riemannov integral ima svojstva 1.1(a)–(d) i djelimično je rješenje problema postavljenog u 1.1. (Dalje proširivanje klase skupova i klase funkcija, obavićemo u Glavi VI). To što se računa da su sve funkcije definisane na čitavom prostoru $\mathbf{R}^n$, ne umanjuje opštost razmatranja. Naime, zamjenom funkcije $f : D \to \mathbf{R}$ koja je definisana na skupu $D \subset \mathbf{R}^n$, funkcijom $\widehat{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, skup tačaka prekida se može povećati samo za neki podskup skupa ∂D koji ima Jordanovu mjeru nula, pri čemu obje funkcije $\widehat{f}$ i f imaju jednake vrijednosti (gornjeg i donjeg) integrala na skupu D.

Tehnika Riemannovog integrala ne dopušta nikakvo suštinsko proširenje klase skupova $\mathcal{J}$ i klase $\mathcal{F}$ funkcija f osim ono nesuštinsko u paragrafu 10, gdje klasa skupova prestaje da bude prsten.

4.22. Zadaci za vježbu

1. Neka je D skup mjerljiv po Jordanu, $I^n \supset D$ interval, $f : D \to \mathbf{R}$ ograničena na D i $\widehat{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definisana sa $\widehat{f}(x) = f(x)$ za $x \in D$, $\widehat{f}(x) = 0$ za $x \in \mathbf{R}^n - D$.

Dokazati da je $\overline{\int}_D f = \overline{\int}_{I^n} \widehat{f}$, $\underline{\int}_D f = \underline{\int}_{I^n} \widehat{f}$.

2. Neka je $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ ograničena funkcija sa kompaktnim nosačem, a s prosta funkcija pri čemu je $s \geq f$ $(s \leq f)$. Neka je D skup mjerljiv po Jordanu. Dokazati da tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji elementaran skup $E \supset D$ $(E \subset D)$ i stepenasta funkcija s_t takva da je $s_t(x) \geq f(x)$, $(s_t(x) \leq f(x))$ za $x \in D$, $s_t(x) = 0$ za $x \in CE$ i $\left|\int_E s_t - \int_E s\right| < \varepsilon$ te da se u 4.6 možemo ograničiti na stepenaste funkcije.

3. Neka je f konstantna funkcija, $f(x) = 0$ za svaki x. Dokazati da je $\int_D f = 0$ za svaki $D \in \mathcal{J}$. Uputstvo: Iz $f + f = f$ i 4.12(a) slijedi da je $2\int_D f = \int_D f$.

4. Neka je f integrabilna na D i g ograničena na D i takva da je $g(x) = f(x)$ za svaki $x \in D$ osim u tačkama skupa $A \subset D$ Jordanove mjere nula. Dokazati da je g integrabilna na D i da je $\int_D g = \int_D f$. Uputstvo: Izmjenom vrijednosti s.s. neprekidne funkcije na skupu Jordanove mjere nula dobija se ponovo s.s. neprekidna funkcija. Zbog toga je g integrabilna na D. Dalje je, $\int_D g = \int_{D-A} g + \int_A g = \int_{D-A} f = \int_{D-A} f + \int_A f = \int_D f$.

5. (**Teorema jedinstvenosti**). Neka je $\mathcal{D}$ potprsten prstena $\mathcal{J}$ skupova mjerljivih po Jordanu koji sadrži sve intervale. Neka je $\mathcal{F}$ potprostor vektorskog prostora R $\mathcal{R}$-integrabilnih funkcija koji sadrži karakteristične funkcije elemenata iz $\mathcal{D}$. Tada je restrikcija Riemannovog integrala (sa $\mathcal{J} \times \mathcal{R}$) na $\mathcal{D} \times \mathcal{F}$ jedino preslikavanje koje ima svojstva (a)–(d) teoreme 4.4, (odnosno svojstva 1.1(a)–(d)). Uputstvo: Pošto je $\mathcal{D} \subset \mathcal{J}$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}$ egzistencija takvog preslikavanja ustanovljena je u teoremi 4.12. Ostaje da se dokaže njegova jedinstvenost. Neka $\widetilde{\int} : \mathcal{D} \times \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ ima navedena svojstva. Iz (d) tada slijedi da je $\widetilde{\int}_D \kappa_D = \int_D = \mu(D)$ za svaki $D \in \mathcal{D}$, a odatle i iz (a) da je $\widetilde{\int}_D s = \int_D s$ za svaku prostu funkciju s. Iz (c) i 4.6 sada se lako dobija da je $\underline{\int}_D f \leq \widetilde{\int}_D f \leq \overline{\int}_d f$ za svaki $D \in \mathcal{D}$ i svaki $f \in \mathcal{F}$. Pošto je f $\mathcal{R}$-integrabilna, slijedi da je $\widetilde{\int}_D^f = \int_D f$.

6. Dokazati, bez korišćenja Lebesgueovog kriterijuma integrabilnosti, da je svaka funkcija koja ima jedno od sljedećih svojstava $\mathcal{R}$-integrabilna na D: (a) monotona na $D = [a, b]$ (b) neprekidna na $D \in \mathcal{J}$, (c) ima konačno mnogo tačaka prekida, (d) skup tačaka prekida je Jordanove mjere nula.

7. Neka su racionalni brojevi iz $(0, 1)$ sadržani u prebrojivoj familiji intervala $\{(a_n, b_n) : n \in \mathbf{N}, (a_n, b_n) \subset (0, 1)\}$. Ako je $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < 1$ i $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, dokazati da ∂A nije Lebesgueove mjere nula.

8. Da li je karakteristična funkcija Cantorovog skupa $\mathcal{R}$-integrabilna?

9. (a) Dokazati da je funkcija f iz zadatka II.18.13.9 integrabilna na intervalu $[0, 1]$ i da je $\int_{[0,1]} f = 0$.

(b) Neka je $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ tzv. *Riemannova funkcija*:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } x \text{ iracionalan,} \\ 0 & \text{ako je } x \text{ racionalan a } y \text{ iracionalan,} \\ 1/n & \text{ako je } x = m/n, \text{ pri čemu su } m \text{ i } n \text{ relativno} \\ & \text{prosti a } y \text{ racionalan.} \end{cases}$$

Dokazati da je f integrabilna na I^2 i da je $\int_{I^2} f = 0$.

10. Neka je $C_0(\mathbf{R}^n)$ klasa svih neprekidnih funkcija sa kompaktnim nosačem a $\mathcal{R}_0(\mathbf{R}^n)$ klasa svih ograničenih funkcija sa kompaktnim nosačem koje su neprekidne s.s. Dokazati da ako neprekidna funkcionela definisana na $\mathcal{R}_0(\mathbf{R}^n)$ uzima na $C_0(\mathbf{R}^n)$ iste vrijednosti kao $\mathcal{R}$-integral, onda ona i na $\mathcal{R}_0(\mathbf{R}^n)$ uzima iste vrijednosti kao $\mathcal{R}$-integral.

11. Ako su f i g integrabilne na D, dokazati da je i fg integrabilna. Uputstvo: Skup tačaka prekida funkcije fg je podskup unije tačaka prekida funkcija f i g.

5. Još neka svojstva Riemannovog integrala

U ovom i naredna tri paragrafa razmatraju se neka svojstva Riemannovog integrala koja se koriste pri izračunavanju integrala. Svuda pretpostavljamo da su sve funkcije lokalno ograničene i neprekidne s.s., a skupovi mjerljivi po Jordanu.

5.1. Teorema. *Ako su $D_1, D_2 \in \mathcal{J}$, a $f, g \in \mathcal{R}$ onda*:

(i) $\displaystyle\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f - \int_{D_1 \cap D_2} f$ *(pri čemu se podrazumijeva $\int_{\varnothing} f = 0$).*

(ii) *Ako je $D \in \mathcal{J}$ i $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in D$, onda je*

$$\int_D f \geq 0.$$

(iii) *Ako je $m \leq f(x) \leq M$ za $x \in D$, onda je*

$$m\mu(D) \leq \int_D f \leq M\mu(D).$$

(iv) (**Prva teorema o srednjoj vrijednosti.**) *Pod uslovima tvrđenja* (iii) *postoji $\theta \in [m, M]$ takav da je*

$$\int_D f = \theta\mu(D).$$

Ako je D povezan i f neprekidna, onda postoji tačka $p \in D$ takva da je $\theta = f(p)$, odnosno

$$\int_D f = f(p)\mu(D).$$

(v) *$|f|$ je takođe u $\mathcal{R}$ i*

$$\left| \int_D f \right| \leq \int_D |f|.$$

(vi) *Ako je $|f(x)| \leq M$, onda je*

$$\left| \int_D f \right| \leq M\mu(D).$$

(vii) *Ako je $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ neprekidno preslikavanje, onda preslikavanje $x \longmapsto F(f(x), g(x))$ takođe pripada klasi $\mathcal{R}$. Specijalno fg, f/g ako je $g(x) \neq 0$ na D, integrabilne su na D.*

(viii) *Ako je $f(x) \geq 0$ za $x \in D$ i $\int_D f = 0$, onda je $f(x) = 0$ s.s. na D.*

Dokaz. Prva četiri tvrđenja su posljedice osnovnih svojstava 4.12 integrala. Na primjer, dokaz tvrđenja (iii) izgleda ovako: Iz svojstava (a) i (d) slijedi da je $\int_D m = m \int_D 1 = m\mu(D)$. Iz (c) dobijamo $\int_D m \leq \int_D f$ i zato $m\mu(D) \leq \int_D f$. A tvrđenja (iv) ovako: Ako je $\mu(D) = 0$ za θ se može uzeti proizvoljan element iz $[m, M]$. Ako je $\mu(D) > 0$, onda iz (iii) slijedi da je $\left(\int_D f\right)/\mu(D) \in [m, M]$. Kad je f neprekidna i D povezan, onda je i $f(D)$ povezan u $\mathbf{R}$, tj. interval I. Iz (iii) slijedi da $\left(\int_D f\right)/\mu(D) \in I$ i tvrđenje je dokazano. Dokaz tvrđenja (v) i (vi) prepuštam čitaocu, uz napomenu da $|f| \in \mathcal{R}$ slijedi iz 4.19.

Tvrđenje (vii) je posljedica teoreme 4.19: Skup tačaka prekida preslikavanja $x \longmapsto F(f(x), g(x))$ je podskup unije skupova tačaka prekida funkcija f i g. Unija dva skupa mjere nula je skup mjere nula. Podskup skupa mjere nula je skup mjere nula.

Dokažimo još tvrđenje (viii): Ako je $\mu(D) = 0$ tvrđenje je trivijalno. Ako je $\mu(D) > 0$, onda D nema unutrašnjih tačaka u kojima je f neprekidna i $\neq 0$. (U protivnom bi, na osnovu (iii), bilo $\int_D f > 0$. Slijedi da je $f(x) = 0$ skoro svuda u skupu tačaka $x \in D$ u kojima je f neprekidna. Na osnovu Lebesgueovog kriterijuma integrabilnosti to znači da je $f(x) = 0$ skoro svuda na D.

5.2. Izračunavanje integrala pomoću Riemannovih integralnih suma. Određivanje približne vrijednosti integrala $\int_D f$ u suštini je nalaženje integrala $\int_D s$ neke proste funkcije s, takve da je razlika $\int_D f - \int_D s$ mala. Po pravilu to se radi tako što se skup D razbija na (ili aproksimira sa) konačnim familijama $D_1, \ldots, D_k$

skupova dovoljno malog dijametra čije mjere se lako određuju, (najčešće su to intervali), u svakom D_i, izabere se po jedna tačka t_i i formira suma $\sum_{i=1}^k f(t_i)v(D_i)$. (Ta suma je integral $\int_D s$ proste funkcije $s = \sum f(t_i)\kappa_{D_i}$). Mi ćemo dokazati da se razbijanjem skupa D na sve sitnije djelove, ovakvim sumama možemo približiti integralu $\int_D f$ koliko god zaželimo.

5.3. Definicija. Ako je $P = \{D_1, \ldots, D_k\}$ razbijanje mjerljivog skupa D, onda se svaka n-torka $T = \{t_1, \ldots, t_k\}$ takva da je $t_i \in D_i$, naziva *označenjem podjele* P a par (P, T) *označenom podjelom* skupa D. Suma

$$S(f, P, T) = \sum f(t_i)\mu(D_i)$$

naziva se *Riemannovom integralnom sumom* funkcije f u odnosu na označenu podjelu (P, T).

Pisaćemo

$$\lim_{d(P)\to 0} S(f, P, T) = A,$$

ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaku podjelu $P = \{D_1, \ldots, D_k\}$ za koju je $d(P) = \max_{1\le i\le k} \operatorname{diam} D_i < \delta$ ($d(P)$ ćemo zvati *dijametrom podjele* P) važi:

$$|S(f, P, T) - A| < \varepsilon$$

(nezavisno od izbora označenja T).

5.4. Lema. *Ako je (P_k) niz razbijanja mjerljivog skupa D i $d(P_k) \to 0$ kad $k \to \infty$, onda je*

$$\lim_{k\to\infty} \overline{I}(f, P_k) = \overline{\int_D} f,$$
$$\lim_{k\to\infty} \underline{I}(f, P_k) = \underline{\int_D} f.$$

Dokaz. Po definiciji supremuma, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji razbijanje P takvo da je

$$0 \le \underline{\int_D} f - \underline{I}(f, P) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Neka je Q proizvoljno razbijanje skupa D. Elemente iz Q razvrstajmo u dva skupa: skup onih $D_i \in Q$ koji leže u nekom skupu podjele P i skup onih $\widetilde{D}_j$ koji ne leže ni u kojem elementu razbijanja P. Tada je

$$\underline{I}(f, Q) = \sum m_i\mu(D_i) + \sum m_j\mu(\widetilde{D}_j). \tag{2}$$

Neka je P' zajedničko usitnjenje razbijanja P i Q koje se dobija kad se skupovi $\widetilde{D}_j$ razbiju na djelove $\widetilde{D}_{jl}$, koji leže u skupovima podjele P. Tada je

$$\begin{aligned} 0 \le \underline{I}(f,P') - \underline{I}(f,Q) &= \sum m_{jl}\mu(\widetilde{D}_{jl}) - \sum m_j\mu(\widetilde{D}_j) \\ &= \sum_{l,j}(m_{jl}-m_j)\mu(\widetilde{D}_{jl}) \le 2M\sum_j \mu(\widetilde{D}_j), \end{aligned}$$

gdje je $M>0$ takav da je $|f(x)|<M$ za $x\in D$. Pošto je mjera unije $\bigcup \partial D_i$ granicâ ∂D_i jednaka nuli, za svaki $\varepsilon>0$ postoji $\delta>0$, takav da je $\sum_j \mu(\widetilde{D}_j) < \varepsilon/(4M)$ za $d(Q)<\delta$. Iz (3) slijedi da je za takve podjele Q

$$\underline{I}(f,P') \le \underline{I}(f,Q) + \varepsilon/2. \tag{4}$$

Pošto je P' usitnjenje i podjele P, imamo da je $\underline{I}(f,P) \le \underline{I}(f,P')$ i iz (4) slijedi da je

$$0 \le \underline{\int_D} f - \underline{I}(f,P') < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Relacije (5) i (1) zajedno daju:

$$0 \le \underline{\int_D} f - \underline{I}(f,Q) \le \underline{\int_D} f - \underline{I}(f,Q') + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{6}$$

Po pretpostavci postoji k_0 takav da je $d(P_k)<\varepsilon$ za $k\ge k_0$. Iz (6) slijedi da je

$$0 \le \underline{\int_D} f - \underline{I}(f,P_k) < \varepsilon \qquad \text{za } k \ge k_0.$$

Time je dokaz leme završen.

5.5. Teorema. *Za skup D mjerljiv po Jordanu i funkcijU $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ slijedeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $f\in\mathcal{R}(D)$ *i* $\displaystyle\int_D f = A$,

(b) $\displaystyle\lim_{d(P)\to 0} S(f,P,T) = A$.

Dokaz. Za svaku podjelu P i svako označenje T je

$$\underline{I}(f,P) \le S(f,P,T) \le \overline{I}(f,P). \tag{7}$$

Iz leme 5.4 i (7) slijedi da je

$$\underline{\int_D} f \le \varliminf_{k\to\infty} S(f,P_k,T_k) \le \varlimsup_{k\to\infty} S(f,P_k,T_k) \le \overline{\int_D} f$$

nezavisno od izbora označenja T_k podjele P_k. Ako važi (a), onda je $\underline{\int}_D f = \overline{\int}_D f = A$ i zato

$$\lim_{d(P_k)\to 0} S(f, P_k, T_k) = A,$$

nezavisno od izbora označenja T_k podjele P_k. To je ekvivalentno sa (b). Obratno, ako važi (b), onda iz leme 5.4 slijedi da je $\left|\underline{\int}_D f - A\right| < \varepsilon$ i $\left|\overline{\int}_D f - A\right| < \varepsilon$ za svaki $\varepsilon > 0$. To znači da je $\underline{\int}_D f = \overline{\int}_D f = A$ i teorema je dokazana.

5.6. Teorema. (Osnovna teorema infinitezimalnog računa). *Neka je realna funkcija f $\mathcal{R}$-integrabilna na intervalu $[a, b]$. Neka je F funkcija definisana sa*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{8}$$

Tada je funkcija F (ravnomjerno) neprekidna na $[a, b]$. Ako je f neprekidna u tački $x \in [a, b]$, onda je F diferencijabilna u x i važi

$$F'(x) = f(x).$$

(Iz osnovne teoreme infinitezimalnog računa slijedi da svaka neprekidna funkcija $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ima primitivnu na $[a, b]$. Ta posljedica, u sljedećoj formulaciji, jedan je od najvažnijih rezultata u matematici: Za svaku neprekidnu funkciju $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ diferencijalna jednačina $F'(x) = f(x)$ ima riješenje na $[a, b]$ i pritom samo jedno koje zadovoljava uslov $F(x_0) = y_0$, gdje su $x_0 \in [a, b]$ i $y_0 \in \mathbf{R}$ proizvoljni).

Dokaz. Neka je $M > 0$ takav da je $|f(x)| \le M$ za $x \in [a, b]$, (definicija 4.11). Iz 5.1(vi) slijedi (da f zadovoljava Lipschitzov uslov u $[a, b]$):

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \le M|x - y|.$$

Odatle slijedi da je F (ravnomjerno) neprekidna na $[a, b]$. Neka je u daljem f neprekidna u $x \in [a, b]$ i $\varepsilon > 0$. Onda postoji $\delta > 0$ takav da je $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ za $t \in A = [x - \delta, x + \delta] \cap [a, b]$. Za svaki $y \in A$ na osnovu 5.1(v) i 5.1(vi):

$$\begin{aligned}\left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{y - x} \int_x^y [f(t) - f(x)]\,dt \right| \\ &\le \frac{1}{|y - x|} \int_A |f(t) - f(x)|\,dt < \varepsilon.\end{aligned}$$

Slijedi da je

$$\lim_{y\to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(x)$$

i dokaz je završen.

5.7. O odnosu diferenciranja i integraljenja. Pošto je svaka $\mathcal{R}$--integrabilna funkcija neprekidna s.s., u osnovnoj teoremi infinitezimalnog računa se, u stvari, tvrdi da relacija (2) važi s.s., tj. da je (s tačnošću s.s.) diferenciranje inverzna operacija integraljenju. Postavlja se pitanje da li je i integraljenje u istom tom smislu, inverzna operacija diferenciranja, tj. da li iz $F'(x) = f(x)$ s.s. i pretpostavke da je F neprekidna a f integrabilna na $[a, b]$, slijedi da je

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt\,?$$

Odgovor na to pitanje je negativan, kao što to pokazuje Cantorova funkcija F (primjer II.15.11.6) kod koje je $F'(x) = 0$ s.s., pa je za $f(x) = 0$, $F'(x) = f(x)$ s.s., ali je

$$\int_a^b f(t)\,dt < F(b) - F(a).$$

Dakle, da bi u (12) važila jednakost, skup na kojem se narušava odnos $F'(x) = f(x)$ mora biti siromašniji nego što je, u opštem slučaju, skup mjere nula.

U sljedećoj teoremi se dokazuje da je primitivna od f, kako je definisana u IV.10.4, u stvari, Riemannov integral funkcije f (vrijednost $F(x)$ neodređenog integrala F funkcije f u tački x je određena relacijom (13).

5.8. Teorema. (Newton-Leibnizova formula). *Neka je F neprekidna na $[a, b]$ i $D \subset [a, b]$. Ako je skup D diskretan, F diferencijabilna u $[a, b] - D$ i $F'(x) = f(x)$ za $x \in [a, b] - D$, onda je*

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt$$

za svaki $x \in [a, b]$.

Newton-Leibnizova formula je osnovno oruđe za efektivno izračunavanje integrala.

Dokaz. Skup $[a, b] - D$ je najviše prebrojiva unija intervala. Dokažimo da jednakost (7) važi na svakom intervalu čija unutrašnjost leži u $[a, b] - D$. Neka je P proizvoljno razbijanje odsječka $[r, s] \subset D - [a, b]$ čije su podione tačke $r = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = s$. Tada je

$$F(s) - F(t) = \sum_{i=1}^{n} \big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}), \tag{14}$$

gdje je $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ takav da važi $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)(x_i - x_{i-1})$. (Egzistencija takvih t_i slijedi iz Lagrangeove teoreme IV.8.5). Puštajući da dijametar podjele P teži nuli, na osnovu 5.5, dobijamo da je

$$F(r) - F(s) = \int_r^s f(t)\, dt. \tag{15}$$

Razmotrimo sada funkciju h definisanu sa

$$h(x) = F(x) - F(a) - \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in [a, b]. \tag{16}$$

Funkcija h je, na osnovu 5.6, neprekidna kao razlika dvije neprekidne funkcije. h je lokalno konstantna na otvorenom skupu $[a, b] - D$. Zaista, ako interval $[x, y]$ leži u $[a, b] - D$, onda iz 4.12 i (15) nalazimo da je

$$h(y) - h(x) = F(y) - F(x) - \int_x^y f(t)\, dt = 0.$$

Pošto je skup $[a, b] - D$ gust u $[a, b]$ a h neprekidna slijedi da je h lokalno konstantna na $[a, b]$. Lokalno konstantna neprekidna funkcija na povezanom skupu je konstantna. Dakle, $h(x) = h(a) = F(a) - F(a) - \int_a^a f(t)\, dt = 0$ za svaki $x \in [a, b]$. Stavljajući u (16) $h(x) = 0$ dobijamo (13) i dokaz teoreme je završen.

5.9. Napomena. Relacija (13) se često zapisuje u obliku:

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(x)\Big|_a^b.$$

5.10. Teorema. *Ako niz (f_k) funkcija integrabilnih po Riemannu na skupu $D \in \mathcal{J}$ ravnomjerno konvergira ka f, onda je f $\mathcal{R}$-integrabilna na D i*

$$\int_D f = \lim_{k \to \infty} \int_D f_k. \tag{17}$$

(Topološki sadržaj tvrđenja: Klasa $\mathcal{F}$ lokalno ograničenih s.s. neprekidnih funkcija je zatvoren podskup od $(\mathbf{R})^{\mathbf{R}^n}$ u odnosu na topologiju ravnomjerne konvergencije na kompaktima).

Dokaz. Po pretpostavci teoreme, skup onih tačaka u D kojima bar jedna funkcija f_k ima prekid je unija prebrojive familije skupova mjere nula pa zato i sam mjere nula (4.17). Iz teoreme II.19.5 slijedi da je granična funkcija f lokalno ograničena, skoro svuda neprekidna pa je $f \in \mathcal{R}(D)$. Jednakost (17) je očigledna ako je $\mu(D) = 0$. Pretpostavimo zato da je $\mu(D) \neq 0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Po pretpostavci postoji k_0 takav da je

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon/(\mu(D)) \quad \text{za } x \in D \text{ i } k \geq k_0.$$

Tada je za $k \geq k_0$

$$\left| \int_D f_k - \int_D f \right| = \left| \int_D (f_k - f) \right| \leq \int_D |f_k - f| \leq \frac{\varepsilon}{\mu(D)} \cdot \mu(D) = \varepsilon.$$

Pošto je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, slijedi (17).

Formulišimo teoremu na jeziku redova.

5.11. Teorema. *Ako je (f_k) niz funkcija integrabilnih po Riemannu na $D \subset \mathbf{R}^n$ i red $\sum f_k$ konvergira ravnomjerno na D ka f, onda je f integrabilna na D i*

$$\int_D f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_D f_k.$$

5.12. Primjer. Neka je (r_k) skup racionalnih brojeva iz $[0,1]$ poređan u niz. Neka je f_0 karakteristična funkcija skupa $[0,1]$ a f_k, $k \geq 1$, karakteristična funkcija skupa $[0,1] - \{r_1, \dots, r_k\}$. Tada je svaka funkcija f_k integrabilna i $\int_0^1 f_k = 1$. Niz (f_k) konvergira tačka po tačka ka karakterističnoj funkciji g skupa iracionalnih brojeva, ali ne konvergira ravnomjerno. Funkcija g ima prekid u svakoj tački intervala $[0,1]$ i nije integrabilna.

Pošto prostor $\mathbf{R}^n$ ima svuda gust prebrojiv podskup mi na sličan način možemo i u $\mathbf{R}^n$, od svake neprekidne funkcije promjenom vrijednosti funkcije na skupu mjere nula, dobiti neintegrabilnu funkciju, koja je granična vrijednost niza integrabilnih funkcija. (Ako za f uzmemo karakterističnu funkciju mjerljivog skupa A koji, na primjer, ima bar jednu unutrašnju tačku, onda to znači da možemo izostavljanjem iz A skupa mjere nula, napraviti neki nemjerljiv skup).

Komentar. U duhu naše geometrijske predstave o integralu (nenegativne funkcije) kao o površini, bilo bi prirodno da funkcija g u primjeru 5.12 bude integrabilna i da joj je integral na $[0,1]$ jednak jedinici. (Iz intervala $[0,1]$ isključen je skup mjere nula).

Primjer 5.12 ilustruje osnovni nedostatak Jordanove mjere i Riemannovog integrala, da veoma slabo trpe granični proces i osjetljivi su na promjene na skupovima mjere nula. (Prirodan tok stvari bi bio da skupovi mjere nula ne utiču na integrabilnost i mjerljivost skupova).

Riemannov integral, je, u stvari, integral klase neprekidnih funkcija. On, u suštini, na toj klasi iscrpljuje sve svoje mogućnosti.